Calcul des rendements obligataires publiés par la BNS

par Robert Müller, Direction de la statistique, Banque nationale suisse

En 2000, la Banque nationale suisse (BNS) a commencé à publier des rendements des obligations qui se basent non plus sur le concept du rendement moyen d'un panier d'obligations, mais sur celui de la structure des taux d'intérêt par échéance. Ces nouvelles données sont les rendements d'emprunts à coupon zéro (ou taux d'intérêt au comptant). Disposer de ces derniers permet d'estimer certaines variables, comme par exemple les anticipations de taux d'intérêt et d'inflation, qui jouent un rôle important dans l'analyse de la situation monétaire par les banques centrales (voir par exemple Heller 1997.)

Comme peu d'emprunts à coupon zéro sont émis sur le marché suisse des capitaux et que les droits aux intérêts et au principal ne sont pas négociés séparément dans le cas d'emprunts à coupons, les taux d'intérêt au comptant doivent être inférés des cours des emprunts à coupons. A cette fin, on peut recourir à différentes méthodes. Pour calculer les rendements publiés dans son Bulletin mensuel, la BNS applique la méthode de Nelson et Siegel (1987) et Svensson (1994, 1995).

Les taux d'intérêt ainsi calculés figurent dans le tableau E3 du Bulletin mensuel de statistiques économiques. Celui-ci comprend les rendements des obligations synthétiques à coupon zéro de la Confédération d'une durée résiduelle de 2, 5, 10, 20 et 30 ans.[1] On y trouve, de surcroît, les rendements d'emprunts synthétiques à coupon zéro d'une durée résiduelle de 8 ans émis par différentes catégories de débiteurs. Y figurent, outre cinq catégories de débiteurs suisses (Confédération, cantons, centrales de lettres de gage, banques, ainsi qu'industrie et commerce), trois catégories de débiteurs étrangers classés d'après leur solvabilité (notations AAA, AA et A de Standard and Poor's). La publication selon la nouvelle méthode des rendements des obligations de la Confédération a commencé en août 2000, et celle des autres catégories de débiteurs, en février 2001.[2] Les séries complètes de données, qui figurent sur le site Internet www.snb.ch, commencent en janvier 1998 pour la Confédération et en janvier 2001 pour les autres catégories de débiteurs.

Avant le passage au nouveau mode de calcul, les rendements publiés correspondaient à la moyenne des rendements à l'échéance d'un panier fixe d'obligations. Le rendement à l'échéance se rapportait à des papiers-valeurs aux coupons et durées résiduelles divers. La durée résiduelle moyenne variait continuellement au cours de l'année. Lors de la redéfinition du panier d'obligations qui avait lieu au début de chaque année, la durée résiduelle moyenne ainsi que le rendement moyen calculé pouvaient varier fortement.

Le présent exposé explique comment les nouveaux rendements d'obligations publiés sont calculés. La première partie débute par une courte description du problème initial et de la méthode d'estimation choisie (section 1.1). Ensuite, la formation des catégories de débiteurs ainsi que les critères de sélection des emprunts et des cours sont expliqués (section 1.2). La première partie se termine par des calculs sur la fiabilité des estimations (section 1.3). La deuxième partie comprend une description détaillée de la méthode que la BNS applique pour estimer la structure des taux d'intérêt par échéance sur la base des cours des emprunts à coupons.

1 Indiqués à titre de comparaison, les rendements des obligations de l'Etat allemand et du Trésor des Etats-Unis étant calculés respectivement par la Banque fédérale d'Allemagne et la Réserve fédérale américaine, ils ne seront pas traîtés plus avant dans l'exposé.

2 Depuis août 2000, les tableaux ont été remaniés à plusieurs reprises. D'août 2000 à janvier 2001, les rendements nouvellement calculés du tableau $D4_2$ ont été publiés sous le titre de «taux d'intérêt au comptant pour obligations de la Confédération», alors que le tableau $D4_1$ indiquait les «rendements moyens d'obligations de débiteurs suisses» basés sur l'ancienne méthode.
De février à novembre 2001, les «taux d'intérêt au comptant pour obligations de la Confédération, obligations d'Etat en euros et bons du Trésor américains, de différentes durées» ont figuré au tableau $D4_1$, et les «taux d'intérêt au comptant pour obligations en francs suisses de différentes catégories de débiteurs, d'une durée de huit ans», au tableau $D4_2$.
Depuis décembre 2001, le tableau E3 comprend, sous le titre de «rendements d'obligations», les séries de données incluses auparavant dans les tableaux $D4_1$ et $D4_2$.

1 Contexte et éléments de base

1.1 Enoncé du problème

Les emprunts par obligations émis en Suisse sont, en règle générale, des obligations à coupons. Une obligation à coupons d'une durée de m années implique, outre le remboursement de la valeur nominale N après m années, les paiements annuels des intérêts correspondant au coupon d'un montant de c. En d'autres termes, toute obligation à coupons peut être considérée également comme un portefeuille d'emprunts à coupon zéro. Conformément à la théorie de l'évaluation des investissements, le prix d'un emprunt à coupons peut être considéré comme la somme des flux de paiement générés par cet emprunt et actualisés aux taux d'intérêt au comptant. Nous obtenons donc

$$(1) \quad P(t,m) = \frac{c}{(1+R_{t,1})} + \frac{c}{(1+R_{t,2})^2} + \ldots + \frac{c}{(1+R_{t,m})^m} + \frac{N}{(1+R_{t,m})^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c}{(1+R_{t,k})^k} + \frac{N}{(1+R_{t,m})^m},$$

où $P(t,m)$ indique le prix au temps t avec une durée résiduelle de m ans et $R(t,k)$ pour k = 1, 2, ... m le taux d'intérêt au comptant à l'échéance de k ans.

On pourrait observer directement la séquence des taux d'intérêt au comptant $R(t,k)$ si un grand nombre d'emprunts à coupon zéro avec des durées résiduelles diverses était traité sur le marché suisse des capitaux. Tel n'est cependant pas le cas. Sur le marché suisse des capitaux, aucun emprunt à coupon zéro n'est pratiquement émis. De plus, il n'est pas possible en Suisse, contrairement à la coutume en Allemagne par exemple, de négocier séparément les droits attachés aux obligations (remboursement de la valeur nominale, paiements de coupons). Ainsi, les taux d'intérêt au comptant ne peuvent pas être observés directement et doivent être estimés.

Avant d'examiner les méthodes proposées à cette fin, il nous faut nous pencher brièvement sur la relation entre les taux d'intérêt au comptant et les rendements à l'échéance. Comme indiqué initialement, les rendements à l'échéance formaient la base des rendements moyens calculés et publiés par la BNS jusqu'à récemment. Le rendement à l'échéance peut être défini comme le taux d'actualisation qui porte à égalité la valeur actualisée nette de tous les flux de paiement résultant d'une obligation et le prix de cette obligation. Il est donc égal à R_t dans l'équation

$$(2) \quad P(t,m) = \frac{c}{(1+R_t)} + \frac{c}{(1+R_t)^2} + \ldots + \frac{c}{(1+R_t)^m} + \frac{N}{(1+R_t)^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c}{(1+R_t)^k} + \frac{N}{(1+R_t)^m}$$

On comprendra aisément que les équations (1) et (2) sont égales si les taux d'intérêt au comptant $R_{t,k}$ sont tous égaux pour k = 1, 2, ..., m et que, partant, la structure des taux d'intérêt est complètement plate. La situation sera différente si la structure des taux varie. Si cette structure monte sur toute la gamme des durées, le taux d'intérêt au comptant dépasse toujours, pour les mêmes échéances, le rendement à l'échéance R_t. Si, par contre, elle est décroissante, les taux au comptant seront toujours inférieurs aux rendements à l'échéance.[3]

Mais revenons au calcul des taux d'intérêt au comptant à partir du prix des obligations à coupons. La littérature indique différentes méthodes qui permettent de déduire empiriquement des données du marché disponibles la structure des taux d'intérêt par échéance. On distingue trois méthodes ou modèles fondamentaux, à savoir les modèles de régression, les modèles de structures des intérêts et le processus dit du bootstrap.[4] La plupart des banques centrales estiment la structure des intérêts avec une méthode de régression en utilisant de préférence le modèle Nelson-Siegel-Svensson.

Le modèle Nelson-Siegel-Svensson pose une hypothèse a priori concernant la structure des taux d'intérêt au comptant, qui peut être décrite comme

$$(3) \quad R_{Svensson}(t,m,\beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m}\right) + \beta_2 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m} - \exp(-\gamma_1 m)\right) + \beta_3 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_2 m)}{\gamma_2 m} - \exp(-\gamma_2 m)\right).$$

L'équation (3) exprime donc le taux au comptant en tant que fonction du vecteur $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$ et de la durée résiduelle m.[5] Lorsque les paramètres sont connus, un taux d'intérêt au comptant $R_{Svensson}(t,m)$ est attribué à chaque durée. Ainsi, les valeurs des flux de paiement résultant des coupons et du remboursement de l'obligation seront calculées en actualisant ces flux, conformément à l'équation (1), par les taux d'intérêt au comptant correspondants. Il en résulte des prix théoriques (estimés) des coupons et de la valeur de remboursement et, partant, un prix théorique (estimé) de l'emprunt à coupons.

3 On remarquera aussi que les rendements à l'échéance de deux obligations dont la durée résiduelle m est identique, mais dont les coupons c diffèrent, ne sont identiques que si la structure des taux est plate (voir par exemple Bodie et Merton, 1998, chapitre 8).

4 Campbell, Lo et MacKinlay (1997, chapitre 11) et Hull (1997, chapitre 17) traitent des modèles de structures des taux d'intérêt et du processus bootstrap.

5 La dérivation de l'équation 3 figure dans la seconde partie de cet exposé (voir 2.1).

L'estimation s'effectue au moyen d'une procédure d'optimisation qui fait varier les paramètres de l'équation (3) et, partant, les taux au comptant jusqu'à ce que l'écart quadratique entre les prix observés et estimés des emprunts à coupons soit minimisé. Une solution alternative consiste à minimiser l'écart entre les rendements à l'échéance estimés et observés. Dans ce cas, les rendements à l'échéance sont calculés à partir des prix théoriques des obligations à coupons et les taux au comptant sont obtenus au moyen d'une procédure d'optimisation comme pour la minimisation à l'aide des prix. Les rendements publiés dans le Bulletin mensuel de la BNS se basent sur cette variante de la méthode Nelson-Siegel-Svensson.

Les avantages de cette méthode sont premièrement l'évolution continue – mais suffisamment flexible pour refléter avec précision la structure des données observées sur le marché – de la courbe estimée de la structure des taux, deuxièmement la possibilité d'estimer une structure des taux avec peu d'observations et troisièmement la robustesse de l'estimation lors d'observations aberrantes. La seconde partie de cet exposé décrit en détails la méthode et son application.

1.2 Choix des emprunts et des cours

Comme la courbe des taux doit indiquer le rapport entre durée et taux d'intérêt avec aussi peu de distorsions que possible, il faut ne comparer que les obligations les plus semblables possibles en matière de solvabilité du débiteur. Disposer toutefois des rendements de secteurs économiques particuliers peut aussi être utile. La BNS s'est efforcée de satisfaire au mieux à ces deux exigences en maintenant la ventilation traditionnelle par secteur pour les obligations de débiteurs suisses et en procédant à une ventilation par solvabilité pour les obligations de débiteurs étrangers.

Au total, on dénombre huit catégories: cinq catégories de débiteurs suisses et trois de débiteurs étrangers. Les débiteurs suisses comprennent (i) la Confédération, (ii) les cantons, (iii) les centrales de lettres de gage, (iv) les banques (y compris les banques cantonales) ainsi que (v) l'industrie (y compris les compagnies d'électricité, de gaz et d'eau) et le commerce. Conformément à la classification de Standard & Poor's, les débiteurs étrangers se ventilent selon les catégories de solvabilité AAA, AA et A. Les débiteurs à la notation AA+ et AA- ainsi que A+ et A- se voient classés respectivement en AA et A, sinon le nombre d'observations s'avérerait insuffisant pour l'estimation. Dans le cas où Standard & Poor's n'a pas attribué de notation, on recourt à celle de Moody's. La BNS a renoncé à la formation d'une catégorie afférente aux obligations des communes, ce secteur étant trop hétérogène en matière de risques. Pour la même raison, la nouvelle ventilation ne prévoit plus de catégorie relative aux sociétés financières.

L'estimation ne comprend pas d'emprunts résiliables, puisque le droit du débiteur à une résiliation anticipée implique respectivement une décote de cours et une prime de rendement.[6] De plus, ne sont pris en considération que des emprunts dont le volume d'émission est d'au moins 100 millions de francs dans le cas de débiteurs suisses et d'au moins 200 millions dans le cas de débiteurs étrangers. Sont également exclues les obligations dont les rendements de la veille s'écartent de l'espérance mathématique découlant de l'estimation de plus du quadruple de l'écart type. De plus, les titres figurant dans l'estimation doivent avoir une durée résiduelle minimale de 12 mois dans le cas des obligations de la Confédération et de 3 mois dans les autres cas. Pour les horizons plus courts, on recourt aux taux interbancaires appliqués aux placements en francs sur l'euro-marché. La difference entre les durées résiduelles mini-

6 En principe, la différence de prix entre une obligation résiliable et non résiliable correspond au prix d'une option call (européenne) donnant droit au débiteur de racheter l'obligation à la date de résiliation à un cours déterminé.

males s'explique par le fait que les obligations de la Confédération se comparent mieux aux placements interbancaires sur l'euro-marché, en matière de solvabilité, que ceux des autres catégories de débiteurs.

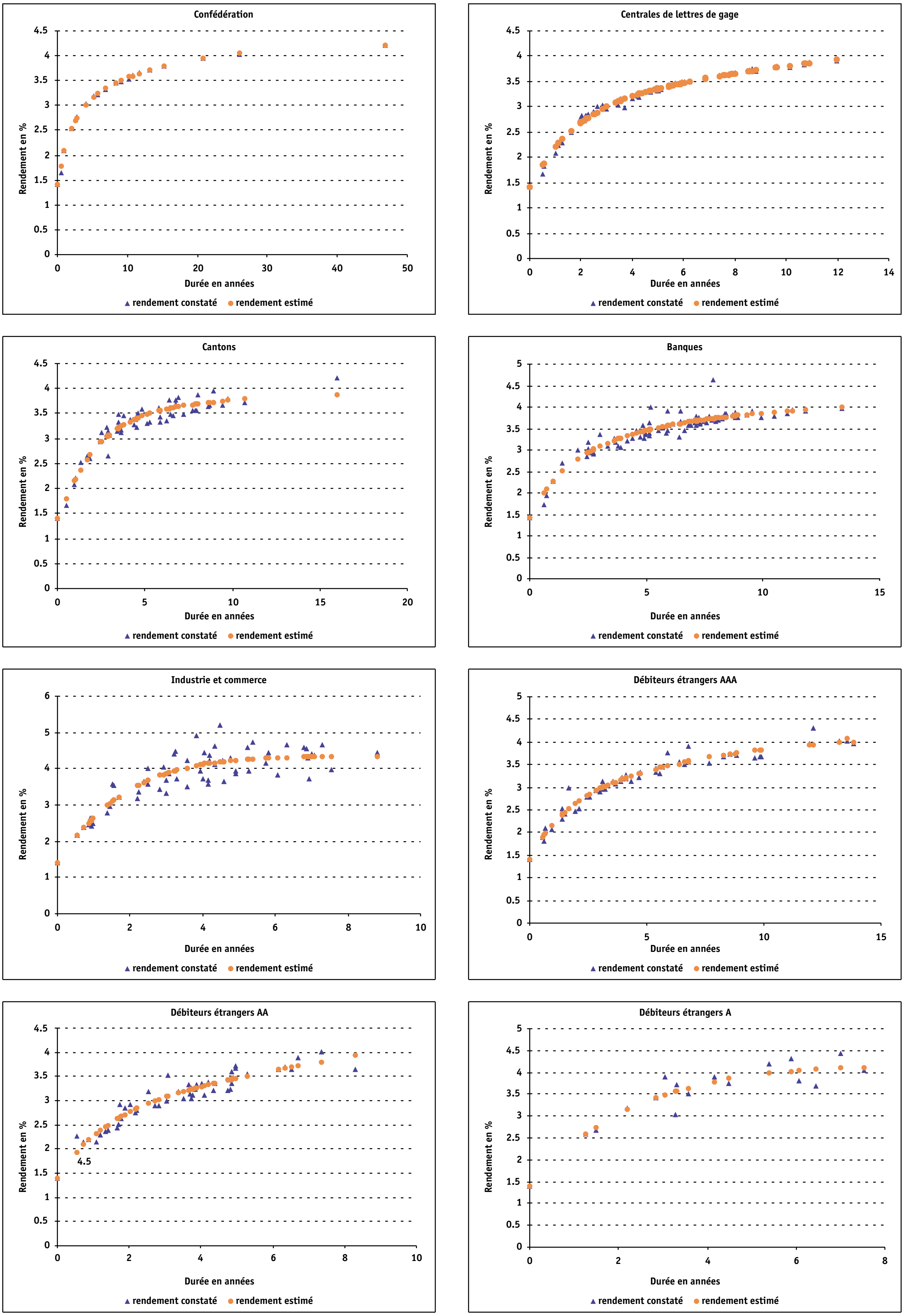
Comme base de données, nous utilisons les cours communiqués par FINVEST chaque jour à 10 h 30. Si une transaction a lieu au jour du calcul, le cours réalisé sert à l'estimation; dans le cas contraire, on recourt à la valeur moyenne entre le cours de l'offre et celui de la demande. Si le cours de la demande fait défaut, le cours de l'offre est utilisé, déduction faite de 25 points de base. Si le cours de l'offre fait défaut, le cours de la demande sert de base de prix. Si ni le cours de l'offre ni celui de la demande n'ont été cotés, on recourt au dernier cours traité.

Le tableau 1 indique les diverses caractéristiques des emprunts ventilés par catégorie. La date de référence est le 3 avril 2002. Le tableau montre la solvabilité non seulement des trois catégories de débiteurs étrangers, mais aussi celle des cinq catégories de débiteurs suisses. Il indique, de surcroît, le volume des émissions ainsi que les durées résiduelles minimales, maximales et moyennes. La solvabilité des obligations de débiteurs suisses se base avant tout sur les notations de Standard & Poor's. A titre subsidiaire, nous utilisons celles de la Banque Cantonale de Zurich et de Moody's. De cette façon, quelque 95% des emprunts ont pu être évalués. La ventilation montre que les obligations de la Confédération, des centrales de lettres de gage et – par définition – des trois catégories de débiteurs étrangers sont les plus homogènes. Celles des cantons, des banques ainsi que de l'industrie et du commerce sont quant à elles beaucoup plus hétérogènes.

Caractéristiques des emprunts libellés en francs, par catégorie de débiteurs (état au 3 avril 2002) Tableau 1

	Confédération	Cantons	Centrales de lettres de gage	Banques (y compris les banques cantonales)	Industrie (y compris électricité, gaz, eau) et commerce	Débiteurs étrangers AAA	Débiteurs étrangers AA	Débiteurs étrangers A
Nombre	18	47	68	76	59	52	50	16
dont: AAA	18	10	68	18		52		
AA (AA-, AA+ incl.)		20		51	13		50	
A (A-, A+ incl.)		17		7	41			16
BBB					1			
durée résiduelle moyenne, en années	11,84	5,63	6,24	6,26	3,92	5,22	3,60	4,24
durée résiduelle maximale, en années	46,75	16,02	11,95	13,36	8,82	13,84	8,28	7,53
durée résiduelle minimale, en années	1,18	1,02	0,53	0,59	0,56	0,55	0,53	0,56
Volume des émissions, en millions de francs	36 524	12 720	32 170	20 510	9 250	19 150	21 175	7 000

Différence entre rendements à l’échéance observés et estimés (3e avril 2002) Graphique 1



1.3 Qualité de l'estimation

La qualité de l'estimation peut être illustrée de différentes manières. Pour chacune des huit catégories de débiteurs, le graphique 1 indique les rendements à l'échéance observés et estimés. Les rendements estimés se fondent sur les taux d'intérêt au comptant. En intégrant les taux d'intérêt au comptant dans l'équation 1, on peut calculer le prix estimé de l'emprunt. L'intégration de ce prix dans l'équation 2 par application de la méthode numérique Newton-Raphson permet d'obtenir le rendement à l'échéance estimé. Les graphiques afférents aux huit différentes catégories de débiteurs indiquent que, si les rendements à l'échéance estimés sont proches des valeurs observées, il existe cependant de grands écarts entre les diverses catégories.

L'erreur de prévision moyenne («Root Mean Squared Yield Error», RMSYE) est l'étalon de l'écart entre rendement estimé et rendement observé. Il se définit comme la racine de la moyenne arithmétique des écarts au carré entre les rendements estimés et observés. Les obligations de la catégorie «Confédération» ont le RMSYE le plus petit, soit à peine 2 points de base (0,02%). Dans les autres catégories, les RMSYE sont parfois beaucoup plus grands, à savoir quelques 10 points de base pour les «cantons» et les «banques,» et 20 points de base pour «l'industrie et le commerce». Dans le secteur des obligations de débiteurs étrangers, le RMSYE est de 7 points de base dans la catégorie AAA, de 10 points dans la catégorie AA et de 15 points dans la catégorie A.

Pour l'essentiel, les écarts reflètent l'homogénéité de la catégorie de débiteurs et la liquidité du marché. Plus la catégorie de débiteurs est homogène et le marché liquide, plus petit est le RMSYE. Plutôt grand par rapport au RMSYE des obligations AA et AAA, celui des obligations A de débiteurs étrangers pourrait bien refléter, outre une liquidité moindre, la solvabilité relativement peu stable des débiteurs de cette catégorie. Comme les agences de notation ne modifient qu'avec un certain retard la solvabilité des débiteurs, des titres souvent attribués à la catégorie des obligations A de débiteurs étrangers ont en fait déjà une solvabilité différente.

2 Modèle théorique et méthode d'estimation

2.1 Modèle théorique

Dans la seconde partie de cet exposé, nous examinerons un peu plus en détail le modèle de structure des taux à la base des calculs de rendement de la BNS, ainsi que la méthode d'estimation. La première section (2.1) traite de la méthode Nelson-Siegel-Svensson appliquée par la BNS. Dans la section suivante (2.2) sont décrites les diverses étapes de l'estimation.

L'équation (1), rappelée ici pour mémoire, constitue le point de départ de notre description:

$$P(t,m) = \frac{c}{(1+R_{t,1})} + \frac{c}{(1+R_{t,2})^2} + \ldots + \frac{c}{(1+R_{t,m})^m} + \frac{N}{(1+R_{t,m})^m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{c}{(1+R_{t,k})^k} + \frac{N}{(1+R_{t,m})^m}.$$

Dans cette équation, on part de l'idée que les coupons sont payés une fois par année, condition généralement remplie dans le cas d'emprunts émis sur le marché suisse. Par ailleurs, le premier paiement de coupons doit avoir lieu précisément un an après t, ce qui n'est guère plausible en règle générale. Lorsque la période s'étend jusqu'au paiement du premier coupon, l'équation (1) doit être écrite comme suit:

$$(4) \quad P(t,m+\lambda) = c\sum_{k=0}^{m} d(t,k+\lambda) + d(t,m+\lambda),$$

où $0 < \lambda < 1$ exprime la période s'étendant jusqu'à la distribution du premier coupon comme fraction d'année. Le montant du remboursement (correspondant ici à la valeur nominale) est égal à un. $d(t,k+\lambda)$ désigne la fonction d'actualisation comme étant

$$(5) \quad d(t,k+\lambda) = \frac{1}{(1+R(t,k+\lambda))^{(k+\lambda)}} \quad \textit{pour } k = 0,1,2,\ldots,m \textit{ et } 0<\lambda<1.$$

Si l'on part de taux d'intérêt composés, la fonction d'actualisation devient

$$(6) \quad d(t,k+\lambda) = \exp\left(-R_s(t,k+\lambda)*(k+\lambda)\right) \quad \textit{pour } k = 0,1,2,\ldots,m \textit{ et } 0<\lambda<1,$$

où $R_s(t,k+\lambda)$ représente le taux d'intérêt composé au comptant, au temps t, d'un emprunt à coupon zéro d'une durée de $k+\lambda$ ans. Alternativement, la fonction d'actualisation indique la valeur en t d'un revenu arrivant à échéance dans $k+\lambda$ ans.

La fixation du prix d'un emprunt à l'aide de l'équation (4) implique la connaissance des taux au comptant. Nous avons déjà relevé que pratiquement aucune obligation à coupon zéro n'est émise sur le marché suisse des capitaux, si bien que les taux au comptant ne peuvent être observés directement. Ils doivent par conséquent être estimés à partir des prix et des autres caractéristiques des obligations à coupons comme la durée résiduelle, le taux du coupon, la valeur nominale et la fréquence des distributions d'intérêts. A cette fin, la méthode Nelson-Siegel-Svensson procède à une régression en recourant à la fonction suivante:

$$(7)\quad f_{Svensson}(t,m,\beta)=\beta_0+\beta_1\exp(-\gamma_1 m)+\beta_2(\gamma_1 m)\exp(-\gamma_1 m)+\beta_3(\gamma_2 m)\exp(-\gamma_2 m).$$

L'équation (7) fixe le taux d'intérêt à terme instantané $f(t,m,\beta)$ en fonction de m. Le taux d'intérêt à terme est le rendement d'un emprunt à coupon zéro acheté à terme, c'est-à-dire d'un emprunt négocié au moment t (date du contrat de vente), livré au moment $T_1 \geq t$ (date de l'opération à terme, m périodes après t) et remboursé à l'échéance $T_2 \geq T_1$. Le taux d'intérêt à terme instantané est défini comme celui d'un à coupon zéro au temps $T_1 \rightarrow T_2$. En d'autres termes, il s'agit du taux d'intérêt fixé aujourd'hui, à savoir au moment t, d'un investissement qui sera réalisé m périodes après t et immédiatement remboursé.

En intégrant l'équation (7) entre les limites d'intégration t et $t+m$ puis en divisant le résultat par m, nous obtenons le taux d'intérêt au comptant au temps t d'un emprunt à coupon zéro avec une durée résiduelle de m ans. Le raisonnement suivant détermine la relation entre le taux d'intérêt au comptant et à celui à terme: le prix au temps t d'un emprunt à coupon zéro livré au temps T (m ans après le moment t) et de paiement 1 doit être égal au prix d'une stratégie de placement séquentielle par laquelle un titre à coupon zéro à l'échéance $T_1 < T$ est acheté et par laquelle est acquis, de surcroît, une série d'emprunts à coupon zéro achetés à terme, échelonnés de manière à ce que l'échéance d'un emprunt à coupon zéro corresponde à celle de l'opération à terme entraînant l'acquisition du prochain emprunt. Formellement, on peut décrire cette relation d'arbitrage de la manière suivante:

$$(8)\quad \begin{aligned}&P(t,T)=P(t,T_1)\cdot P(t,T_1,T_2)\cdot P(t,T_2,T_3)\cdot\ldots\cdot P(t,T_{n-1},T)\\ \Rightarrow\ & e^{-R_s(t,T)[T-t]}=e^{-R_s(t,T_1)[T_1-t]}e^{-F_s(t,T_1,T_2)[T_2-T_1]}\ldots e^{-F_s(t,T_{n-1},T)[T-T_n]}\end{aligned}$$

avec $t=T_0<T_1<\ldots T_n=T$. Dans ce contexte, $P(t,T_{i-1},T_i)$ pour $(i=1,2,\ldots,n)$ détermine le prix au moment t convenu pour un emprunt à coupon zéro acheté au terme (T_{i-1}) qui arrive à échéance au temps T_i. $P(t,T)$ et $P(t,T_1)$ sont les prix d'emprunts à coupon zéro aux durées résiduelles respectives de $(T-t)$ et de (T_1-t) ans, tandis que $R_s(t,T)$ et $R_s(t,T_1)$ désignent les taux d'intérêt au comptant correspondants. De plus, $F_s(t,T_{i-1},T_i)$ représente le taux à terme fixé au temps t pour la période allant de T_{i-1} und T_i.

En mettant l'équation (8) en logarithmes et en tenant compte de la relation d'équivalence $R_s(t,T_1) = F_s(t,t,T_1)$, nous obtenons

$$(9)\quad \begin{aligned}&R_s(t,T)[T-t]=F_s(t,T_0,T_1)[T_1-T_0]\\ &+F_s(t,T_1,T_2)[T_2-T_1]+\ldots+F_s(t,T_{n-1},T_n)[T_n-T_{n-1}]\\ &=\sum_{i=1}^{n}F_s(t,T_{i-1},T_i)[T_i-T_{i-1}]\end{aligned}$$

avec $t=T_0<T_1<\ldots T_n=T$. Si nous supposons, de surcroît, qu'il n'est investi qu'en emprunts de durées égales $\Delta t = T_1-t = T_1-T_2 = \ldots = T_n-T_{n-1}$, l'équation (9) se simplifie en

$$(10)\quad R_s(t,T)[T-t]=\sum_{i=1}^{i=n}F_s(t,T_{i-1},T_i)\Delta t.$$

Si $\Delta t \rightarrow 0$ et que $n \rightarrow \infty$, le terme de droite de l'équation (10) peut être formulé comme intégrale. Ainsi, le taux d'intérêt au comptant d'un emprunt d'une durée de $T-t$ ans à coupon zéro se formule par

$$(11)\quad \begin{aligned}&R_s(t,T)[T-t]=\int_{\tau=t}^{\tau=T}f_s(t,\tau)\delta\tau\\ \Rightarrow\ & R_s(t,T)=\frac{\int_{\tau=t}^{\tau=T}f_s(t,\tau)\delta\tau}{[T-t]}.\end{aligned}$$

Le taux d'intérêt à terme instantané $f_s(t,\tau) = F_s(t,\tau,\tau)$ représente le taux d'intérêt à terme, fixé au moment t, d'un emprunt à coupon zéro qui commence au moment $\tau \geq t$ (échéance de l'opération à terme) et qui arrive immédiatement à échéance. La moyenne de tous les taux d'intérêt à terme instantanés allant du moment t au moment T est donc le taux au comptant d'un titre à coupon zéro pour une durée de $m \equiv (T-t)$ ans. Si $\tau=t$, le taux d'intérêt à terme instantané $f_s(t,t)$ correspond au taux d'intérêt instantané au comptant $R_s(t,t)$.

Si l'on pose, dans l'équation (11), t=0 et T=m ainsi que, dans l'équation (7), $f_{Svensson}(t,m,\beta)$ pour $f_s(t,\tau)$, la fonction Nelson-Siegel-Svensson du taux au comptant composé devient

$$R_{Svensson}(t,m,\beta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m}\right) + \beta_2 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_1 m)}{\gamma_1 m} - \exp(-\gamma_1 m)\right) + \beta_3 \left(\frac{1-\exp(-\gamma_2 m)}{\gamma_2 m} - \exp(-\gamma_2 m)\right). \quad (12)$$

L'équation (12) correspond à l'équation (3) de la première partie du présent exposé. Elle décrit les taux d'intérêt au comptant au moment t, qui dépend de la durée m. La fonction permet de retracer des courbes monotones croissantes, monotones décroissantes, en forme de U, en forme de S, ainsi qu'en forme de U inversé et en forme de S inversé. Elle est assez flexible pour reproduire avec une précision suffisante l'ensemble de données observées sur le marché.

La fonction Nelson-Siegel-Svensson a des propriétés limites intéressantes du point de vue économique. Si la durée m d'un emprunt à coupon zéro tend vers l'infini, le taux d'intérêt au comptant se rapproche asymptotiquement de β_0. En revanche, si la durée m se rapproche de zéro, le taux d'intérêt au comptant, qui correspond maintenant au taux d'intérêt au comptant instantané en t, a la valeur de $\beta_0 + \beta_1$.

Si la structure des taux correspond à la fonction Nelson-Siegel-Svensson, on peut recourir aux valeurs de fonction $R_{Svensson}(t,k+\lambda,\beta)$ de l'équation (12) pour les taux au comptant, $R(t,k+\lambda)$ pour k=0,1..m, dans les équations (5) et (4) respectivement. Les flux de paiement futurs (coupons et valeur nominale) seront actualisés aux taux d'intérêt au comptant de la fonction Nelson-Siegel-Svensson. Il en résulte un prix théorique d'une obligation à coupons $\hat{P}(t,m+\lambda)$ = $P(\beta,t,m+\lambda)$ avec $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$:

$$\hat{P}(t,m+\lambda) = c\sum_{k=1}^{m}\hat{d}(t,k+\lambda) + \hat{d}(t,m+\lambda), \quad (13)$$

où

$$\hat{d}(t,k+\lambda) = \exp\left(-R_{Svensson}(t,k+\lambda,\beta)*(k+\lambda)\right) \quad pour\ k = 0,1,2,\ldots,m. \quad (14)$$

2.2 Méthode d'estimation

Dans la section 2.1, nous avons vu que le prix d'une obligation à coupons impliquant le versement de un à l'échéance et de c aux dates de distribution est fonction des paramètres $\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$, du coupon c et des dates de distribution. Le but de l'estimation est de déterminer les paramètres $\beta=(\beta_0, \beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma_1,\gamma_2)$.

A chaque moment d'estimation t les paramètres sont estimés séparément. Dans toutes les estimations, le taux au comptant de durée zéro est limité par le taux d'intérêt au jour le jour (tomorrow next). Il en découle une limitation par le fait que $\beta_0+\beta_1$ est égal au taux d'intérêt au jour le jour. L'estimation minimise les écarts quadratiques entre les rendements à l'échéance observés et estimés r_i et $\hat{r}_i$.[7]

$$r_i(t,m_i+\lambda_i) = \hat{r}_i(t,m_i+\lambda_i) + \varepsilon_r \ pour\ i = 1,2,\ldots,n \qquad \varepsilon_r = i.d.d.\ \ E(\varepsilon_r) = 0 \quad Var(\varepsilon_r) = \sigma_r^2 \quad (15)$$

Les divergences de rendement ε_r peuvent avoir des causes diverses. Trois de celles-ci sont prépondérantes. Premièrement, ε_r peut traduire des effets sur la formation des taux qui ne sont pas pris en cause par le modèle d'arbitrage. Deuxièmement, on constate des écarts entre les moments auxquels les transactions sont exécutées. Troisièmement, les différences de solvabilité entre les titres attribués à une certaine catégorie de débiteurs peuvent jouer un rôle. Dans ce cas toutefois, la condition posée dans l'équation (15), d'après laquelle les écarts entre rendements observés et théoriques sont répartis de manière indépendante ne serait plus remplie.

7 Une solution de substitution consiste à minimiser, au lieu des erreurs des rendements à l'échéance, celles des prix (écarts quadratiques entre les prix observés et estimés). En fait, le rendement à l'échéance n'est qu'une manière d'exprimer le prix d'une obligation. Toutefois, il réagit de manière très élastique aux variations de prix des emprunts à court terme. Dans le cas d'un emprunt de faible durée, un écart entre les prix observé et estimé influe davantage sur l'écart entre les rendements observé et estimé que dans le cas d'un emprunt de très longue durée. En règle générale, on prévient cet effet indésirable en entreprenant une minimisation pondérée (voir notamment Ricart et Sicsic, 1995).

Lors de la procédure de minimisation des écarts, les paramètres sont estimés par calcul itératif et par une procédure d'optimisation de façon à ce que la somme des écarts quadratiques de rendements à l'échéance observés et estimés soit minimisée. Dans une première étape, le vecteur paramétrique $\beta_t = (\beta_{0t},\beta_{1t},\beta_{2t},\beta_{3t},\gamma_{1t},\gamma_{2t})$ est initialisé avec des valeurs plausibles. (La BNS recourt aux cours de clôture de la veille.) Ensuite, l'optimisation se poursuit par la méthode «simplex» jusqu'à ce que la convergence soit réalisée. Les valeurs paramétriques qui en découlent sont alors utilisées comme nouvelles valeurs initiales pour une optimisation d'après la méthode BHHH.[8] L'optimisation se poursuit à nouveau jusqu'à ce que la convergence soit réalisée.

L'optimisation passe par les mêmes étapes, que l'on applique la méthode simplex ou la méthode BHHH. Ces étapes se résument de la manière suivante:

1. Initialisation des paramètres $\beta_t = (\beta_{0t},\beta_{1t},\beta_{2t},\beta_{3t},\gamma_{1t},\gamma_{2t})$ pour $t=1$.
2. Calcul des taux au comptant théoriques $R_{Svensson,t}(k+\lambda_i,\beta_t)$ pour $k=0,1,..,m_i$ et $i=1,2,...,n$ d'après (12).
3. Calcul des facteurs d'actualisation théoriques $\hat{d}_{it}(k+\lambda_i)=d_{it}(k+\lambda_i,\beta_t)$ pour $k=0,1,..,m_i$ et $i=1,2,...,n$ d'après (14).
4. Calcul des prix théoriques $\hat{P}_{it}(m_i+\lambda_i)=P_{it}(m_i+\lambda_i,\beta_t)$ pour $i=1,2,...,n$ d'après (13).
5. Calcul des rendements à l'échéance théoriques $\hat{r}_{it}(m_i+\lambda_i)=r_{it}(m_i+\lambda_i,\beta_t)$ d'après (4) en appliquant la méthode Newton-Raphson.
6. Calcul de la valeur de fonction finale $\sum_{i=1}^{n}(r_{it}(m_i+\lambda_i)-\hat{r}_{it}(m_i+\lambda_i))^2$ (somme des écarts quadratiques entre rendements observés et estimés) en appliquant respectivement les méthodes simplex et BHHH pour fixer un nouveau β_{t+1}.
7. Contrôle du critère de convergence: $(\beta_{t+1}-\beta_t)'(\beta_{t+1}-\beta_t) < \alpha$ pour $\alpha > 0$.
8. Si le critère de convergence n'est pas satisfait: retour à la deuxième étape avec β_{t+1} comme nouveau vecteur paramétrique pour β_t.

Les intervalles de confiance des prix, taux au comptant, taux à terme et rendements à l'échéance estimés se calculent par la méthode du delta.[9] La valeur explicative de l'équation d'estimation s'évalue par l'erreur de prévision moyenne (Root Mean Squared Yield Error, RMSYE). Actuellement, toutes les estimations sont effectuées à l'aide du logiciel RATS.

8 Pour la méthode BHHH, voir Berndt, Hall, Hall et Hausman (1974).
9 Voir notamment Greene (1993, page 297).

Références bibliographiques

Berndt, E.K., Hall, B.H., Hall, R.E. et Hausman, J.A. 1974. Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models. *Annals of Economic and Social Measurement* 3: 653–665.

Bodie, Z. et Merton, R.C. 1998. *Finance*. London: Prentice-Hall.

Campbell, J.Y., Lo, A.W. et MacKinlay, C.A. 1997. *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.

Greene, W.H. 1997. *Econometric Analysis*. London: Prentice-Hall.

Heller, D. 1997. Zinskurven und ihr Informationsgehalt für die Geldpolitik der SNB. *Geld, Währung und Konjunktur / Monnaie et conjoncture* (Bulletin trimestriel de la Banque nationale suisse) 15(2): 167–176.

Hull, J.C. 1997. *Options, Futures, and other Derivatives*. London: Prentice-Hall.

Nelson, C.R. et Siegel, A.F. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business* 60: 473–489.

Ricart, R. et Sicsic, P. 1995. Estimating the Term Structure of Interest Rates from French Data. Banque de France *Bulletin Digest* 22: October.

Svensson, L.E.O. 1994. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994. NBER Working Paper Series Nr. 4871.

Svensson, L.E.O. 1995. Estimating Forward Interest Rates with the Extended Nelson & Siegel Method. *Sveriges Riksbank Quarterly Review* 3: 13–26.